

Cap 9. Mecânica em referenciais não-inerciais

As leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais. Há, no entanto ocasiões em que seria desejável ter-se uma descrição do movimento em referencial não inercial:

- movimento de corpo que cai em vagão acelerado
- o referencial ligado à Terra é, para muitas finalidades, um "bom" referencial inercial; para outras, não: foguete de longo alcance, e outras...

9.1 Aceleração sem rotação

Considere referencial inercial S_0 e outro S que acelera em relação a S_0 com aceleração $\vec{A}$ (não necessariamente constante) e velocidade $\vec{V}$, $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$, e bola de massa m em movimento. Com relação a S_0 , $m\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}$, $\vec{r}_0$ sendo a posição da bola relativa a S_0 e $\vec{F}$ a resultante das forças que agem sobre ela.

Seja $\vec{r}$ a posição da bola relativa a S ; sua velocidade em S é $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 - \vec{V}$ (transformação de Galileu), e

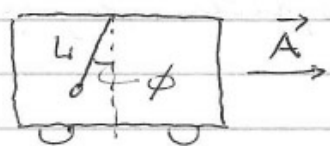
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{A}$$

$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{A}$, que tem a mesma forma que a 2ª lei em referencial inercial exceto pelo aparecimento do termo $-m\vec{A}$ do lado direito.

Ele não é uma força no sentido Newtoniano (quem faz?) - vamos chamá-lo de força inercial ("fictícia");

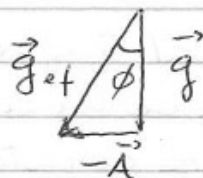
$\vec{F}_{\text{inercial}} = -m\vec{A}$, que deve lhe soar familiar - seus "efeitos" são sentidos quando você está num avião que acelera para a decolagem, num ônibus que freia bruscamente, num carro que faz uma curva acentuada.

Exemplo: pêndulo num carro acelerado



Em S_0 :

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}, \quad \vec{F} = m\vec{A}$$



Em S :

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{A}$$

$$= \vec{T} + m(\vec{g} - \vec{A})$$

Se o pêndulo está em ^{equilíbrio} repouso $\vec{g}_{\text{ef}}$ (em S), $\ddot{\vec{r}} = 0$ e $\vec{T} = -m\vec{g}_{\text{ef}}$

$$\phi_{\text{eq}} = \arctan\left(\frac{A}{g}\right)$$

(princípio de equivalência e relat. geral)

9.2 As marés

Uma aplicação interessante da ideia acima é a explicação do fenômeno das marés, que são o resultado da atração gravitacional diferencial da Lua e do sol sobre as massas oceânicas (mas não só elas), que provoca protuberâncias no nível dos oceanos. A ação da Lua é +

importante neste caso, e vamos começar por ignorar a contribuição do Sol e supor que os oceanos cobrem toda a superfície do planeta.

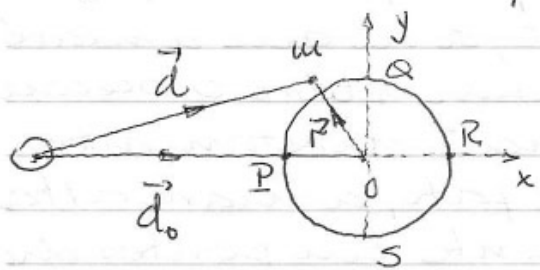
O fato de haverem 2 marés altas por dia descarta uma explicação aparentemente razoável do fenómeno, a de que a maré sobe pela atração lunar sobre o oceano apenas naquela porção diretamente "abaixo" da Lua. De fato, a maré alta ocorre simultaneamente em pontos diametralmente opostos da superfície terrestre. (figuras)

O efeito dominante da atração lunar é dar a todo o planeta, incluindo os oceanos, uma aceleração $\vec{A}$ dirigida para a Lua - de fato, para o CM do sistema Terra-Lua -, uma aceleração centrípeta que é quase exatamente igual à produzida como se toda a massa de nosso planeta estivesse concentrada em seu centro. No entanto, objetos do lado voltado para a Lua sofrem uma atração um pouco maior do que se estivessem em seu centro, enquanto a ~~sobre~~ objetos do lado oposto é um pouco menor. Portanto, vistos de um referencial fixo na Terra, os primeiros têm uma aceleração adicional enquanto os segundos a têm de menos, como se fossem ligeiramente repelidos pela Lua.

Vamos tornar quantitativo este raciocínio. As forças sobre um objeto de massa m próximo à superfície terrestre são:

(i) a atração gravitacional da Terra, $m\vec{g}$

(ii) a da Lua, $-GM_L m \frac{\hat{d}}{d^2}$



(iii) a resultante das demais forças não gravitacionais $\vec{F}_{ng}$ (empuxo, por exemplo)

A aceleração do centro da Terra, O , é

$$\vec{A} = -GM_L \frac{\hat{d}_0}{d_0^2}$$

Escrevendo a lei de Newton no referencial terrestre (acelerado) resulta

$$m\vec{r}'' = \vec{F} - m\vec{A} = (m\vec{g} - GM_L m \frac{\hat{d}}{d^2} + \vec{F}_{ng}) + GM_L m \frac{\hat{d}_0}{d_0^2}$$

$$m\vec{r}'' = m\vec{g} + \vec{F}_{mané} + \vec{F}_{ng}, \text{ onde}$$

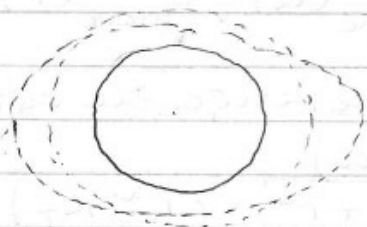
$$\vec{F}_{mané} = -GM_L m \left(\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{d}_0}{d_0^2} \right)$$

é a diferença entre a força de atração lunar na posição real de m e a que existiria se m estivesse no centro da Terra O .

Todo o efeito da Lua no movimento (relativo à Terra) de qualquer objeto próximo à Terra está contido em $\vec{F}_{mané}$. Num ponto de frente para a Lua, como P ,

os vetores $\vec{d}$ e $\vec{d}_0$ têm a mesma direção (e sentido), mas $d_0 > d$ - portanto o 1º termo de $\vec{F}_{\text{maré}}$ domina e $\vec{F}_{\text{maré}}$ aponta para a Lua. Em R, outra vez $\vec{d}$ e $\vec{d}_0$ têm a mesma direção, mas agora $d > d_0$ e $\vec{F}_{\text{maré}}$ aponta para longe da Lua. No ponto Q, $\vec{d}$ e $\vec{d}_0$ têm direções diferentes; as componentes x dos 2 termos de $\vec{F}_{\text{maré}}$ praticamente se cancelam, mas só o primeiro tem componente y - portanto, em Q (e S), $\vec{F}_{\text{maré}}$ aponta para o centro da Terra (O). Pondo isso tudo junto, resulta a distorção da superfície livre dos oceanos ilustrada abaixo (com enorme exagero!).

Lua
O



Altura das marés

A maneira + simples de encontrar a diferença de alturas entre as marés alta e baixa é observar que a superfície do oceano é uma equipotencial. Para demonstrar isto, considere uma gota de água na superfície do oceano. Ela está em equilíbrio (em relação ao referencial terrestre) sob a ação de 3 forças: a atração gravitacional terrestre $m\vec{g}$, a força de maré $\vec{F}_{\text{maré}}$ e a força (derivada de pressão) $\vec{F}_p$ da água do oceano que a

circunda (é o empuxo). Como a gota está em equilíbrio, $m\vec{g} + \vec{F}_{\text{maré}}$ é perpendicular à superfície, já que $\vec{F}_p$ o é. Como ambas são conservativas,

$$m\vec{g} = -\nabla U_{gT} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{\text{maré}} = -\nabla U_{\text{maré}},$$

com $U_{\text{maré}} = -GM_L m \left(\frac{1}{d} + \frac{x}{d_0^2} \right)$

Como $m\vec{g} + \vec{F}_{\text{maré}}$ é perpendicular à superfície do oceano, $\nabla(U_{gT} + U_{\text{maré}})$ também é, e $U = U_{gT} + U_{\text{maré}}$ é constante ao longo da superfície. (cqd)

Por isso,

$$U(P) = U(Q)$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_{gT}(P) - U_{gT}(Q)}_{mgh} = U_{\text{maré}}(Q) - U_{\text{maré}}(P)$$

mgh (h é a diferença de alturas procurada)

No ponto Q, $d = \sqrt{d_0^2 + r^2}$ ($r \simeq R_T$) e $x = 0$

$$\Rightarrow U_{\text{maré}}(Q) = -GM_L m \frac{1}{\sqrt{d_0^2 + r^2}} =$$

$$= -\frac{GM_L m}{d_0} \left(1 + \left[\frac{r}{d_0} \right]^2 \right)^{-1/2} \simeq -\frac{GM_L m}{d_0} \left(1 - \frac{R_T^2}{2d_0^2} \right)$$

Em P, $d = d_0 - R_T$ e $x = -R_T$

$$\Rightarrow U_{\text{maré}}(P) = -\frac{GM_L m}{d_0} \left(1 + \frac{R_T^2}{d_0^2} \right) (= U_{\text{maré}}(R))$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{GM_L m}{d_0} \cdot \frac{3R_T^2}{2d_0^2};$$

$$\text{como } g = \frac{GM_T}{R_T^2}, \quad h = \frac{3}{2} \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^2}{d_0^3}$$

$$R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}, \quad M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}, \quad M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg},$$

$$d_0 = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$$

Resulta $h = 54 \text{ cm}$ (devido somente à Lua).

A maré causada pelo Sol sozinho é também calculada por expressão similar (com $M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ no lugar de M_l e $d_o = 1,495 \times 10^{11} \text{ m}$), resultando em $h = 25 \text{ cm}$ (Sol sozinho) - menor que o efeito lunar, mas não desprezível, e os 2 efeitos se combinam de maneira interessante:

- quando Terra, Sol e Lua estão aproximadamente alinhados (luas cheia ou nova), as forças de maré se somam e podemos prever marés muito altas, com $h = 54 + 25 = 79 \text{ cm}$
- quando os 3 formam triângulo retângulo, os 2 efeitos se subtraem, e $h = 54 - 25 = 29 \text{ cm}$.

A teoria que apresentamos está basicamente correta, especialmente para locais no meio dos oceanos, mas as situações reais envolvem outras complicações intrigantes. Talvez a + importante delas seja o efeito das massas continentais, que podem afetar nossas conclusões (obtidas na hipótese dos oceanos cobrirem todo o planeta) resultando em marés ora menores, ora maiores, do que previmos. Mares interiores, como o Mar Negro e o Mediterrâneo, têm marés menores, enquanto marés

que se movem em oceanos grandes podem ser bloqueadas pelos continentes que os margeiam e alcançar alturas bem maiores.

- 01/06/09 -

9.3 O vetor velocidade angular

No resto deste capítulo vamos discutir o movimento de objetos como vistos em referenciais que giram (em relação a algum referencial inercial). Antes disso, e como preparação, vamos discutir alguns conceitos e fixar notações para manusear rotações adequadamente.

Um estudo detalhado das rotações é surpreendentemente complexo, mas aqui não vamos precisar de muitos destes detalhes, e algumas propriedades difíceis de demonstrar (rigorosamente) são razoavelmente plausíveis e podem ser aceitas e enunciadas sem demonstração.

Os eixos girantes que consideraremos serão quase sempre fixos em relação a um corpo rígido. O exemplo + importante é um conjunto de eixos fixos em relação à Terra em rotação, mas veremos outros exemplos no capítulo 10. Quando discutirmos a rotação de um corpo rígido, só existem 2 situações diferentes que devemos considerar:

- algumas vezes o corpo gira em

torno de um ponto seu que é fixo (em algum referencial inercial); por exemplo, uma roda que gira em torno de um eixo fixo, ou um pêndulo que gira em torno de seu ponto de suspensão.

- se o corpo girante não tem nenhum ponto fixo (uma bola que gira enquanto viaja em direção ao gol), usualmente procederemos em 2 passos:

- (i) determinamos o movimento do CM;
- (ii) analisamos o movimento rotacional do corpo em relação ao CM.

Assim que fixarmos a atenção no 2º passo, estaremos de fato examinando o movimento num referencial no qual o CM está fixo, retornando então à 1ª situação.

O resultado + importante relativo a um corpo que gira em torno de um ponto fixo é o teorema de Euler: o movimento + geral possível de um corpo em relação a 1 ponto fixo O é uma rotação em torno de algum eixo (que pode mudar com o tempo) que passa por O .

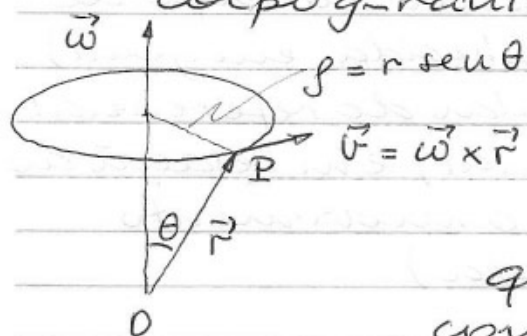
Apesar de ter uma demonstração complicada, este teorema deve parecer muito natural - vamos aceitá-lo, adiando a demonstração para a disciplina seguinte.

O teorema implica que, para especificar uma rotação em torno de um ponto dado O , basta dar a direção do eixo em torno do qual ela se deu e o ângulo de que o corpo girou. Na verdade, focalizaremos sobretudo a taxa de rotação, ou velocidade angular, e o teorema de Euler implica que ela pode ser especificada pela direção do eixo de rotação ($\hat{u}$) e a taxa de rotação em torno deste eixo. ($\omega = \frac{d\theta}{dt}$). Por exemplo, um carrossel pode estar girando em torno de um eixo vertical ($\hat{u}$ é vertical) a uma taxa de 10 rad/min ($\omega = 10 \text{ rad/min}$).

É muitas vezes conveniente combinar estes 2 elementos para formar o vetor velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \hat{u}$, e o vetor $\vec{\omega}$ especifica ao mesmo tempo a direção do eixo de rotação ($\hat{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$) e a taxa de rotação ($\omega = |\vec{\omega}|$). Para retirar a ambiguidade na especificação do sentido de $\vec{\omega}$ usamos a regra da mão direita.

É importante reconhecer que $\vec{\omega}$ pode variar com o tempo, em módulo e/ou direção (exemplo: a espaçonave descontrolada do filme Apolo XIII) - $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Há, por outro lado, situações interessantes nas quais $\vec{\omega}$ é constante - isto é verdade, com grande precisão, para o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo.

- Taxa de variação de vetor fixo em um corpo girante



Seja P ponto fixo no corpo girante

⇒ seu movimento é circular (ainda que instantaneamente),

com raio $\rho = r \sin \theta$ e

$$v = \omega \rho = \omega r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Este resultado é + geral: se $\vec{e}$ é um vetor fixo no corpo girante,

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}$$

- Soma de velocidades angulares

Sejam

$\vec{v}_{21}$: velocidade do referencial 2 em relação ao " 1;

$\vec{v}_{32}$: velocidade do corpo 3 em relação ao referencial 2;

$\vec{v}_{31}$: " , referencial 1 :

Então,

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21} \quad (\text{transformação de Galileu})$$

Sejam $\vec{\omega}_{31}$, $\vec{\omega}_{32}$ e $\vec{\omega}_{21}$ definidas de forma similar; então, qualquer que seja $\vec{r}$ (ponto P),

$$\vec{\omega}_{31} \times \vec{r} = \vec{\omega}_{32} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}) \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}$$

Notações:

$\vec{\omega}'$: velocidade angular do corpo de interesse (desconhecida, em geral)

$\vec{\Omega}$: velocidade angular do referencial girante (não inercial) em relação ao qual observamos o movimento. (em geral conhecida)

9.4 Derivadas temporais em referencial girante.

Seja S referencial que gira com $\vec{\Omega}$ em relação a S_0 inercial ($\Omega_{\text{Terra}} \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$), ambos com origem comum no ponto O .

$\Rightarrow$ o único movimento de S em relação a S_0 é rotação com $\vec{\Omega}$. (Exemplo: S é referencial fixo em relação à Terra - S é conveniente mas não inercial, S_0 é inconveniente mas inercial)

Seja $\vec{Q}$ um vetor arbitrário (posição ou velocidade da bola, força resultante sobre um objeto). Vamos relacionar a taxa de variação de $\vec{Q}$ medida em S_0 com a medida em S .

$\vec{Q}' = \sum_i Q_i \hat{e}_i$, $\hat{e}_i$ unitários ortogonais fixos em S . Observador em S_0 vê os $\hat{e}_i$ girando. Em S ,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_S = \sum_i \frac{dQ_i}{dt} \hat{e}_i$$

Como os Q_i são os mesmos em S e S_0 , usaremos notação especial para

Em S_0 ,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \sum_i \frac{dQ_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_i Q_i \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0}$$

Mas $\left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$

$$\Rightarrow \sum_i Q_i \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} = \sum_i Q_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

Finalmente,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

9.5 Segunda lei de Newton no referencial girante

Vamos supor aqui que $\vec{\omega}$ seja constante (se $\vec{\omega}$ é constante em 1 referencial, é constante no outro, já que $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$)

Considere partícula de massa m e posição $\vec{r}$. Em S_0 ,

$$m \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \vec{F} \quad (\text{resultante})$$

Mas $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}$;

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_S \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] + \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

Para ter resultado + limpo, uso a notação $\dot{\vec{Q}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S$; lembre $\vec{\omega} = \text{constante}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

e a 2ª lei vista em S se escreve

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \underbrace{2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}}_{\text{força de Coriolis}} + \underbrace{m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}}_{\text{força centrífuga}}$$

$$\text{ou } m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{F}_{\text{cf}}$$

- 03/06/09 -

9.6 A força centrífuga

Vamos examinar, até onde possível, estas 2 forças inerciais separadamente. Em particular, a força de Coriolis é proporcional à velocidade do objeto $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ relativa ao referencial girante - ela é, portanto, nula para um objeto em repouso neste referencial e desprezível para objetos que se movam lentamente.

Vamos focalizar prioritariamente no resto do capítulo o referencial girante solidário à Terra, no qual podemos facilmente estimar a importância relativa destas 2 forças inerciais.

Elas dependem da direção de vários vetores - são obtidas por produtos vetoriais - mas para uma estimativa de ordem de grandeza podemos tomar

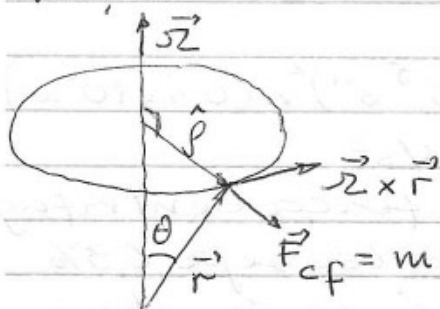
$$F_{\text{Cor}} \sim m v \Omega \quad \text{e} \quad F_{\text{cf}} \sim m r \Omega^2,$$

onde v é a velocidade observada no referencial da Terra (girante); portanto,

$$\frac{F_{\text{Cor}}}{F_{\text{cf}}} \sim \frac{v}{R\Omega} = \frac{v}{V} \rightarrow \text{velocidade,}$$

no referencial inercial, de ponto no equador terrestre ($\sim 1600 \text{ km/h}$), que mostra

que, para projéteis com $v \ll 1600 \text{ km/h}$ um bom ponto de partida é ignorar a força de Coriolis, o que faremos nesta seção.



Na latitude θ :

$\vec{\Omega} \times \vec{r}$: velocidade vista no ref. inercial é tangente ao círculo,

$$\vec{F}_{cf} = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \quad \text{e } \vec{F}_{cf} \parallel \hat{p}$$

$$|\vec{F}_{cf}| = \sqrt{\Omega^2 r \sin \theta} = \sqrt{\Omega^2 \rho} \quad \text{ou } \vec{F}_{cf} = m \Omega^2 \rho \hat{p}$$

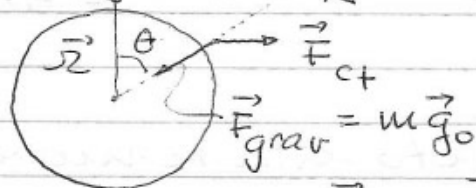
Se $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ é a velocidade vista no ref. inercial, $F_{cf} = \frac{mv^2}{\rho}$

- Aceleração de queda livre $\rightarrow$ quando $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{cor} = 0$

É a aceleração inicial $\vec{g}$, relativa à Terra, de objeto abandonado do repouso (no vácuo) próximo à superfície da Terra. A eq. de movimento no referencial da Terra é

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{cf}, \text{ com}$$

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} = m\vec{g}_0 \quad \text{e } \vec{F}_{cf} = m\Omega^2 \rho \hat{p}$$



a "verdadeira" aceleração da gravidade

$$\Rightarrow \vec{F}_{ef} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{cf} = m\vec{g}' = m\vec{g}_0 + m\Omega^2 \rho \hat{p}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{g}_0 + \Omega^2 R \sin \theta \hat{p}$$

A componente radial de $\vec{g}$ é

$$g_{\text{rad}} = g_0 - \Omega^2 R \sin^2 \theta \quad (\text{na direção de } -\hat{r})$$

No equador (latitude $\pi/2$) o termo centrífugo é máximo:

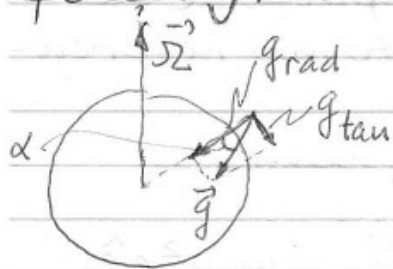
$$\Omega^2 R = (7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \times (6,4 \times 10^6 \text{ m}) \approx 0,034 \text{ m/s}^2$$

Como $g_0 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, a força centrífuga faz com que g no equador seja 0,3% menor que nos polos (gravímetros modernos têm precisão de 1 em 10^9)

A componente tangencial de $\vec{g}$ é um efeito puramente centrífugo:

$$g_{\text{tang}} = \Omega^2 R \sin \theta \cos \theta$$

(zero nos polos e no equador, máximo em $\theta = \pi/4$), e faz com que a aceleração de queda livre não tenha exatamente a direção da força gravitacional:



$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{g_{\text{tan}}}{g_{\text{rad}}}$$

com valor máximo

em $\theta = \pi/4$ igual a

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{\Omega^2 R / 2}{g_0} \approx \frac{0,034}{2 \times 9,8} \approx 1,7 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,1^\circ$$

9.7 A força de Coriolis

Quando um objeto está se movendo no referencial girante, aparece uma segunda força inercial

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m \vec{\dot{r}} \times \vec{\Omega} = 2m \vec{v} \times \vec{\Omega}$$

onde $\vec{v}$ é relativa ao referencial girante. Observe o paralelo entre esta força e a força magnética sobre carga em movimento ($q\vec{v} \times \vec{B}$), que não tem grande significado mas pode ajudar a visualizar como a força de Coriolis afeta o movimento.

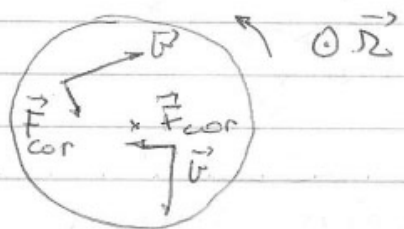
O módulo de $\vec{F}_{\text{cor}}$ depende dos módulos e direções de $\vec{v}$ e $\vec{\Omega}$. Para o referencial solidário à Terra e objeto com $v \approx 50 \text{ m/s}$, a aceleração máxima que ela pode produzir (quando $\vec{v} \perp \vec{\Omega}$) é

$$a_{\text{max}} = 2v\Omega \approx 2 \times (50 \text{ m/s}) \times (7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}) \approx 7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2,$$

que é muito pequena quando comparada a $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$. Foguetes e mísseis de longo alcance têm velocidades bem maiores que 50 m/s , e para eles o efeito da força de Coriolis é + importante. Além disso veremos que há sistemas, como o pêndulo de Foucault, nos quais a força de Coriolis, apesar de muito pequena, pode agir por um longo tempo e, por isso, produzir efeitos grandes.

- Direção da força de Coriolis

$\vec{F}_{\text{cor}}$ é sempre perpendicular a $\vec{v}$

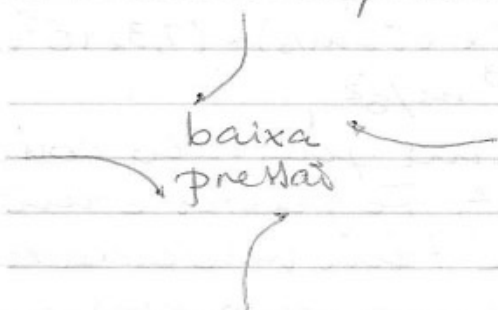


No exemplo do diagrama, $\vec{F}_{\text{cor}}$ sempre quer defletir $\vec{v}$ para sua direita (hemisfério

fénio norte visto do polo norte). No hemisfério sul - visto do polo sul - tendência a defletir para a esquerda.

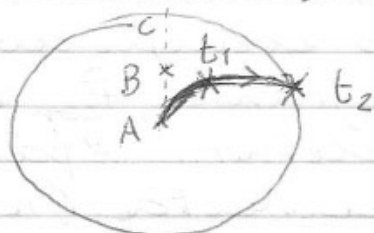
Este efeito é importante para a artilharia de longo alcance, que deve sempre mirar à esquerda de seu alvo no hemisfério norte.

Um exemplo importante deste efeito na meteorologia é o fenômeno dos ciclones, que ocorrem quando o ar ao redor de uma região de ^{baixa} ~~alta~~ pressão se move rapidamente para dentro dela: no hemisfério norte, o ar circula no sentido trigonométrico.

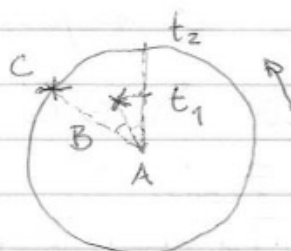


É importante lembrar que as forças centrífuga e de Coriolis são, no fundo, efeitos cinemáticos que aparecem quando insistimos em usar um referencial (não inercial) girante.

Exemplo: movimento simples sobre o prato de um toca-discos (problema da lista 1!)



(a) ref. girante



(b) ref. inercial

A força resultante (como vista no ref. inercial) é nula. No ref. girante, as 2 únicas forças são a centrífuga e a de Coriolis. A primeira é sempre radial para fora e não interfere na deflexão. A segunda deflete a velocidade para a direita, e faz o objeto seguir a trajetória curva vista em (a). No instante t_1 , quando alcança o raio de B, está a uma pequena distância à direita de B, e no instante t_2 , quando chega à borda do prato, está ainda mais para a direita de C (4 vezes mais, se $t_2 = 2t_1$).

No ref. inercial, a força resultante é nula e o objeto segue trajetória reta. No instante t_1 , quando alcança B, este girou para a esquerda - e o mesmo para C. Visto do objeto em movimento, B e C se moveram para a esquerda. Portanto, visto de B e C, o objeto teve sua trajetória encurvada para a direita.

9.8 Queda livre e a força de Coriolis

Considere objeto caindo no vácuo próximo a um ponto $\vec{R}$ da superfície terrestre. A eq. de movimento é

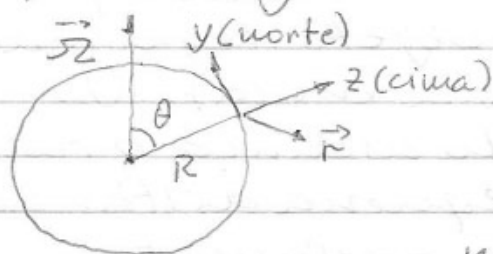
$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor}$$

$$\vec{F}_{cf} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}; \text{ mas } \vec{r} \approx \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cf} \approx m(\vec{\omega} \times \vec{R}) \times \vec{\omega}$$

$$m\vec{g}_0 + \vec{F}_{cf} = m\vec{g} \quad (\vec{g} \text{ é o observado em } \vec{R})$$

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{g} + 2\vec{\dot{R}} \times \vec{\Omega}$, equações que não envolve $\vec{R}$, apenas suas derivadas e não é, portanto, alterada por uma mudança de origem. Vamos pô-la na posição $\vec{R}$,



escolher os eixos como indicado na figura, e decompor a eq. de movimento nas componentes.

$$\vec{\dot{R}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\vec{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \vec{\dot{R}} \times \vec{\Omega} = (\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta, -\dot{x}\Omega \cos \theta, \dot{x}\Omega \sin \theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} = 2\Omega (\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta)$$

$$\ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \cos \theta$$

$$\ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{x} \sin \theta$$

Vamos resolver estas 3 equações recorrendo a uma sequência de aproximações relacionadas com o pequeno módulo de Ω .

Em ordem zero, ignoramos Ω :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g$$

que são as equações do movimento de queda livre resolvidas na física básica. Se o objeto cai a partir do repouso do ponto $x=y=0$ e $z=h$, $x(t)=y(t)=0$ e $\dot{z} = -gt \Rightarrow z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, que é nossa solução nesta aproximação - muito boa em geral, por final!

A próxima aproximação - em ordem 1 - consiste em usar o resultado na ordem anterior do lado ^{direito} ~~esquerdo~~ das eq. de movimento completas:

$$\ddot{x} = 2\Omega g t \sin \theta$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = -g$$

As 2 últimas são as mesmas que em ordem zero; a 1ª é nova, com solução

$$x(t) = \frac{1}{3} \Omega g t^3 \sin \theta,$$

e vamos parar nesta ordem de aproximação.

O curioso fato que resulta da solução é que um objeto em queda livre não cai na vertical! Ao invés disso, a força de Coriolis provoca na trajetória uma (leve) curvatura para leste (x positivo). Para ter uma ideia do tamanho deste efeito, considere um objeto que caia num poço de 100 m de profundidade no Equador. O tempo de queda é

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ e a deflexão sofrida na queda é}$$

$$x = \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2,2 \text{ cm},$$

pequena, mas observável. Quem primeiro previu este efeito foi Newton (que surpreza, não é ??!) e ele foi verificado por seu rival científico Robert Hooke (1635-1703), mas a explicação correta teve que esperar compreendermos a força e o efeito de Coriolis.

Podemos explicar o efeito olhando-o de um referencial inercial, no qual o objeto começa sua queda com uma velocidade tangencial para o leste, que é maior que a de um ponto da superfície onde vai cair - a distância ao eixo de rotação é maior. Quantitativamente:

- esta velocidade inicial é $(R+h)\Omega \sin\theta$ e a diferença instantânea ~~entre esta~~ velocidade ~~do~~ do ponto - do referencial girante - por onde passa o objeto ~~é~~ ~~$\Delta v = v_{\text{relativo}} = \frac{1}{2}gt^2\Omega \sin\theta$~~ e a velocidade do ponto de queda é

$$\Delta v = z\Omega \sin\theta$$

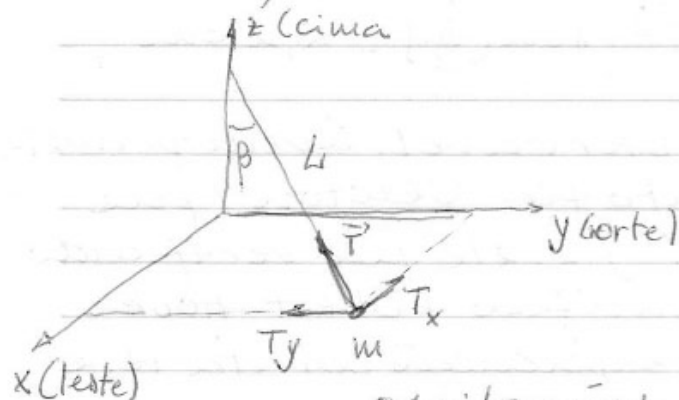
$$\Rightarrow \Delta x = \int_0^t z\Omega \sin\theta dt' =$$

$$= \Omega \sin\theta \int_0^t (h - \frac{1}{2}gt'^2) dt' =$$

$$= \Omega \sin\theta \left[ht - \frac{1}{3}gt^2 \frac{t}{3} \right] = \Omega \sin\theta \cdot \frac{1}{2}gt^2 \cdot \frac{2t}{3}$$

$$= \frac{gt^3}{3} \Omega \sin\theta$$

9.9. O pêndulo de Foucault (1819-1868)



No mesmo referencial (girante) que usamos no problema anterior, consideremos pequenas oscilações ($\beta \ll 1$).

A eq. de movimento,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g}_0 + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad (\vec{g} \parallel -\hat{z})$$

$$\beta \ll 1 \Rightarrow T_z = T \cos \beta \simeq T \quad \text{e} \\ T_z \simeq mg \quad (\dot{\vec{r}} \text{ e } \ddot{\vec{r}} \text{ pequenos}) \\ \Rightarrow T = mg$$

As componentes

$$\frac{T_x}{T} = -\frac{x}{L}, \quad \frac{T_y}{T} = -\frac{y}{L} \quad (\text{semelhança de triângulos})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2\dot{y}\Omega \cos \theta \\ \ddot{y} = -\frac{g}{L}y - 2\dot{x}\Omega \cos \theta, \quad \text{ou,}$$

$$\text{com } \omega_0^2 = \frac{g}{L} \text{ e } \Omega \cos \theta = \Omega_z,$$

$$\ddot{x} - 2\Omega_z \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (i)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega_z \dot{x} + \omega_0^2 y = 0, \quad (ii)$$

sistema que nos dá outra oportunidade de usar o truque com números complexos:

$\eta = x + iy$, e a representação de η no plano complexo nos dá uma imediata visualização (na projeção) do movimento do pêndulo sobre o plano oxy .

$$(i) + i(ii) \Rightarrow$$

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0,$$

eq. diferencial de 2ª ordem, linear e homogênea $\Rightarrow$ 2 soluções linearmente

independentes, que procuramos com a forma ~~$e^{-i\omega_0 t}$~~ $e^{-i\Omega_2 t}$:

$$\lambda^2 - 2\Omega_2 \lambda - \omega_0^2 = 0, \text{ e}$$

$$\lambda = \Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 + \omega_0^2} \approx \Omega_2 \pm \omega_0,$$

e a solução geral é

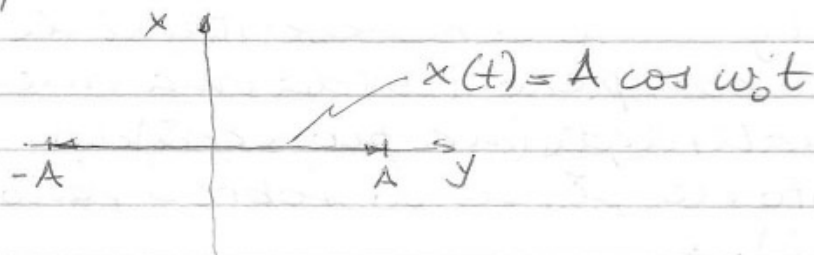
$$\eta = e^{-i\Omega_2 t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t})$$

Vamos especificar condições iniciais para determinar C_1 e C_2 : suponha que $x(0) = A$, $y(0) = 0$, e $v_x(0) = v_y(0) = 0$

$$C_1 = C_2 = \frac{A}{2}, \text{ e}$$

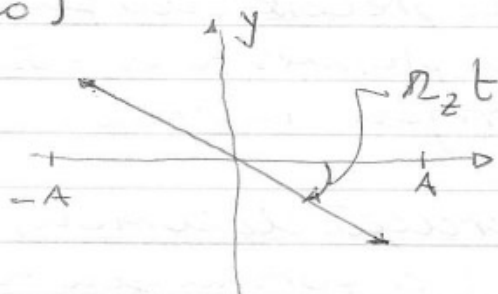
$$\eta(t) = x(t) + iy(t) = A e^{-i\Omega_2 t} \cos \omega_0 t$$

Como $\Omega_2 \ll \omega_0$, o termo em cosseno ~~realiza~~ muitas oscilações antes que a exponencial mude muito. Portanto, no início $x(t)$ oscila com frequência ω_0 entre A e $-A$, enquanto $y = 0$ - o pêndulo executa MHS na direção x



Depois de algum tempo, $e^{-i\Omega_2 t}$ se torna significativamente diferente de zero $\rightarrow \eta$ gira do ângulo $-\Omega_2 t$.

No hemisfério norte (sul) $\Omega_z > 0$ ($\Omega_z < 0$) $\Rightarrow x + iy$ continua a oscilar graças ao termo $\cos \omega_0 t$, mas numa direcção que se move no sentido dos ponteiros do relógio (trigonométrico)



Isto é, o plano da oscilação do pêndulo gira (lentamente) com velocidade angular $\Omega_z = \Omega \cos \theta$. No polo norte $\theta = 0$ e $\Omega_z = \Omega$ é a velocidade angular do planeta - fácil de entender, se olharmos a partir de um referencial inercial. Em outras latitudes, o resultado não é tão simples de entender - mas tentaremos daqui a pouco. No equador, $\Omega_z = 0$ e o pêndulo não gira. Na latitude 40° , $\Omega_z = \Omega \cos 50^\circ \approx \frac{2}{3} \Omega = \frac{240^\circ}{\text{dia}}$, e, em 6 horas, o plano do pêndulo terá girado de 60° , um efeito facilmente observável.

Outra forma de obter este resultado: a componente horizontal da força de Coriolis (no plano xy) tem módulo

$$|\vec{F}_{\text{Cor}}^{\text{hor}}| = |2m \vec{v} \times (\Omega \cos \theta \hat{z} + \Omega \sin \theta \hat{y})|$$

$$= 2m \Omega \cos \theta v$$

já que a componente y ~~prode~~ $\vec{r}$ produz
 força na direção $\hat{z}$, e $\vec{r} \perp \vec{F}_{\text{cor}}^{\text{hor}}$. Portanto,
 para o pêndulo, é como se ele estivesse
 no polo norte de um planeta fictício que
 gira com velocidade angular $\Omega \cos \theta$
 $\Rightarrow$ a frequência de precessão do pêndulo
 de Foucault é simplesmente $\omega_F = \Omega \cos \theta$,
 no sentido anti-trigonométrico.

9.10. Força e aceleração de Coriolis

Vimos no cap. 1 a forma que toma
 a 2ª lei em coordenadas polares bi-
 dimensionais:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \Leftrightarrow \begin{cases} F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \end{cases}$$

Podemos agora compreender melhor
 os termos adicionais da aceleração em
 termos das forças inerciais centrífuga
 e de Coriolis.

Considere partícula sujeita à força
 resultante $\vec{F}$ e obrigada a se mover
 em 2D. Com relação a um referencial
 inercial S com origem em O , a partícula
 deve satisfazer às equações acima.
 Considere agora referencial não inercial
 S' com a mesma origem e que gira
 com velocidade angular constante Ω ,
 escolhida de forma que $\Omega = \dot{\phi}$ num
 certo instante t_0 . — isto é, neste instante t_0
 S' e a partícula têm a mesma velocidade
 angular (S' é chamado de referencial
 có-movente)

As coordenadas da partícula em S' são (r', ϕ') , e $r' = r$ (S' e S têm a mesma origem), enquanto, em $t = t_0$, $\phi' = 0$. Vamos aplicar a 2ª lei em S' - para isto precisamos incluir as forças inerciais.

$$\vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor} = m \vec{\ddot{r}}'$$

Em coordenadas polares:

- $\vec{F}_{cf}$ é puramente radial, com componente $r\Omega^2$

- $\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}' \times \vec{\Omega}$; como $\vec{v}'$ é puramente radial em S' , $\vec{F}_{cor}$ tem a direção de $\hat{\phi}'$, com componente $-2m\dot{r}\Omega$

- $m\vec{\ddot{r}}'$ pode ter escrito na forma do cap. 1 - mas, em $t = t_0$, $\phi' = 0$, e os termos que o contém são nulos. Logo, em S' ($t = t_0$),

$$\vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor} = m\vec{\ddot{r}}' \Leftrightarrow \begin{cases} F_r + mr\Omega^2 = m\ddot{r} \\ F_\phi - 2m\dot{r}\Omega = m r \ddot{\phi} \end{cases}$$

(como $\vec{\Omega}$ é constante, $\ddot{\phi}' = \ddot{\phi}$),

que são exatamente as eqs. obtidas no referencial inercial ($\Omega = \dot{\phi}$), com os termos adicionais agora posto do lado esquerdo.

Resultado:

- no referencial inercial, as forças são + simples, mas as acelerações + complicadas;
- no referencial có-movente, a complicação muda de lugar

A escolha do referencial é, pois, uma questão de conveniência. Em particular,

III

quando o observador está fixo num referencial girante (como nós!) é, em geral, + conveniente trabalhar no referencial girante e aprender a conviver com as forças inerciais (fictícias) centrífuga e de Coriolis.